13/4/20

# Το απύθμενο πηγάδι

Θεωρούμε τη Γη ομογενή σφαίρα σταθερής πυκνότητας. Τότε

$$M = \rho \frac{4\pi}{3} R^3 = \rho V : \text{πυκνότητα} \cdot \text{όγκος}$$

Μάζα της Γης    R: ακτίνα της Γης

Στο σημείο r $\quad M_r : \rho \frac{4\pi}{3} r^3$. Θέλω να δω σε μια τυχαία ακτίνα τις εξισώσεις που διέπουν το σύστημα

Σ' αυτό το σημείο δεν έχω όλη $R^3$ τη μάζα της Γης

Από το νόμο του Newton:

νόμος της παγκόσμιας έλξης

$$m \cdot \ddot{r} = -\frac{G M_r m}{r^2} = -\frac{G \rho \frac{4\pi}{3} r^3 m}{r^2} \Rightarrow$$

$$\ddot{r} + \overbrace{\left(\frac{4\pi}{3} G \rho\right)}^{\omega^2} r = 0 : \text{και} \quad \frac{4\pi}{3} G\rho = \frac{4\pi}{3} G \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{GM}{R^3}$$

Διαφ. Εξίσωση 2ης τάξης

1ο βήμα: κοιτάω την τάξη της ⇒ μέγιστη παράγωγο

2ο βήμα: γραμμική (απαλλαγμένη από cosx, sinx)

3ο βήμα: σταθερών συντελεστών

Όταν έχω διαφ. 2ης τάξης, γραμμική και σταθ. συντελεστών τα μαζεύω όλα στο r και θέτω $\omega^2 = \frac{4\pi}{3} G\rho$

G: επιτάχυνση της βαρύτητας

Θέτω $\boxed{\ddot{r} + \omega^2 r = 0}$, $\omega^2 = \frac{GM}{R^3} = \frac{g}{R}$

Απλούστερη ταλάντωση με συχνότητα ω

Εκτελεί ταλάντωση γύρω από το κέντρο της Γης

$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ άρα $\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{0.15 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24}}{10^{18}}} =$

ω: συχνότητα

$= 1.2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$

$M = 5.97 \cdot 10^{24}\, kg$

$R = 6.37 \cdot 10^6\, m$

$\frac{2\pi}{T} = 1.2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$

Οποιοδήποτε σώμα και θα πέσει στο αβύθιστο πηγάδι θα κάνει 1 ώρα και 45 λεπτά $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{1.2} 10^3\, sec = 1{,}45$

και θα ξανά γυρίσει πίσω γιατί κάνει απλή αρμονική ταλάντωση. Ότι θα κάνει ταλάντωση μπορώ να το περιμένω? Καθώς πέφτει προς τα κάτω το σώμα επιταχύνει, όταν φτάσει στο κέντρο της Γης επιβραδύνει και λόγω της ~~...~~ ελκτικής βαρυτικής δύναμης αλλάζει κατεύθυνση/ πηγαίνει προς τα πάνω ξανά επιταχύνει κι όταν περνάει το κέντρο της Γης ξανά επιβραδύνει

(*) Έργο Δύναμης

Ορισμός: Το έργο που εκτελείται από μια δύναμη 3 διαστάσεων $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ επί λείας καμπύλης $\vec{r}(t)$ για το χρονικό διάστημα $a \le t \le b$ είναι

Από το ένα αρχικό σημείο στο άλλο $r(a) \to r(b)$

$$\boxed{W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

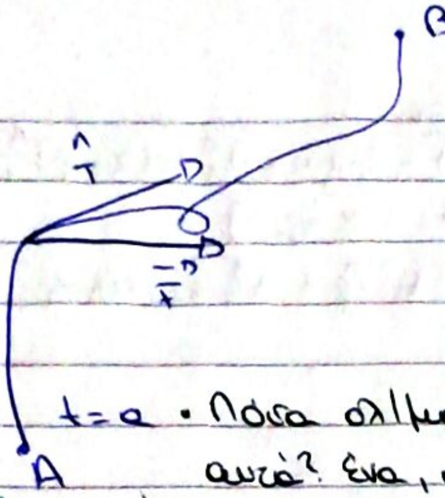
Αλλαγή μεταβλητής

μοναδιαίο εφαπτόμενο και διάστημα. $d\vec{r}$: ορίζεται μέσω διανυσμάτων $\Rightarrow$ εσωτερικό γινόμενο

Δηλαδή αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ να παριστάνει δύναμη (π.χ. βαρυτική) που δρα σε ποια περιοχή του χώρου και ένα σωμάτιο που κινείται πάνω στην καμπύλη:

$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

(*) Η ενέργεια που καταναλώνεται



Το πώς θα κινηθώ έχει σημασία? Έχει σημασία από που ξεκινάει και πού τελειώνει. Έχω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα άρα η καμπύλη έχει ρόλο.

Η ενέργεια που καταναλώνεται ή παράγεται για να μετακινηθεί το σωμάτιο από το A στο B είναι:

$t=a$ • Πόσα σήματα είναι αυτά? Ένα, απλό/μονό $\quad \vec{W} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$

Διαφορά επικαμπύλιου και μονού: A → B
Θα λάβουμε υπόψη την καμπύλη

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να υπολογίσουμε το έργο.
Από τον ορισμό γνωρίζουμε ότι:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_a^b \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt =$$

$$= \int_a^b \vec{F} (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})\, dt = \int_a^b (M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}) \underset{\uparrow}{\cdot} (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})\, dt =$$

εσωτ. γινόμενο

$$= \int_a^b (M\dot{x} + N\dot{y} + P\dot{z})\, dt \underset{\uparrow}{=} \int_a^b M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k})$ $\qquad$ αναλύω το καθένα: $\dot{x}\,dt = \frac{dx}{dt} dt = dx$

Ομοίως και τα άλλα

Παρατήρηση: $\quad d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$\vec{F} \cdot d\vec{r} = M\,dx + N\,dy + P\,dz$

Παράδειγμα: Βρείτε το έργο της $\vec{F} = (y - x^2)\hat{i} + (z - y^2)\hat{j} + (x - z^2)\hat{k}$

Επί της καμπύλης $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ από το $(0,0,0)$ στο $(1,1,1)$

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι: (*) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$, δηλαδή

Πρέπει να επαληθεύσω ότι τα σημεία ανήκουν στην καμπύλη ο που $x=1, y=1, z=1$ / $x=0, y=0, z=0$ βρίσκω το ίδιο $t$? Τότε ανήκουν στην καμπύλη

$\vec{F} = (t^2 - t^2)\hat{i} + (t^3 - t^4)\hat{j} + (t - t^6)\hat{k} =$

$= (t^3 - t^4)\hat{j} + (t - t^6)\hat{k}$

$\vec{v} = \hat{i} + 2t\hat{j} + 3t^2\hat{k}$, δηλαδή

$$W = \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F} \cdot \vec{v}\, dt = \int_0^1 [2t(t^3 - t^4) + 3t^2(t - t^6)]\, dt$$

$$= \int_0^1 (-3t^8 - 2t^5 + 2t^4 + 3t^2)\, dt = -\frac{3}{9} - \frac{2}{6} + \frac{2}{5} + \frac{z}{4} =$$

$= \frac{39}{60}$ • Για εξάσκηση να κάνω τον τύπο $\int_a^b M dx + N dy + P dz$. Ποια η διαφορά από επικαμπύλιο? Έχω πάρει υπόψη την καμπύλη

Γενικότερα το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε είναι πόση είναι η ενέργεια που πρέπει να δαπανήσουμε για να μετατοπίσουμε ένα υλικό σημείο υπό την επίδραση ~~ε~~ ενός πεδίου / δύναμης

Η ενέργεια που θα καταναλώσω δεν εξαρτάται από τη διαδρομή

Έτσι το επικαμπύλιο δεν εξαρτάται πλέον από τη διαδρομή, αλλά επιλέγω όποια καμπύλη θέλω

Το έργο $\boxed{W = \int_{\ell} \vec{F}\, d\vec{r}}$ γενικά εξαρτάται όχι μόνο από τα σημεία Α και Β αλλά και τη διαδρομή που ακολουθούμε. Στην ειδική περίπτωση που είναι ανεξάρτητο της διαδρομής το πεδίο $\vec{F}$ καλείται συντηρητικό

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\vec{F}$ πεδίο ορισμένο σε ανοικτό χωρίο D και A, B δύο τυχαία σημεία του D. Αν το έργο $\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}}$ είναι το ίδιο για όλες τις διαδρομές από το A στο B, δηλαδή είναι ανεξ/το της διαδρομής που επιλέγουμε να ακολουθήσουμε, το πεδίο καλείται συντηρητικό ή διατηρητικό στο D

Επιπλέον αν μπορούμε να γράψουμε:

$\vec{F} = \vec{\nabla} f$ (πεδίο κλίσης) όπου $f$ μια διαφ/μη συνάρτηση που καλείται δυναμικό του $\vec{F}$ στο D μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα και να γράψουμε:

$$\boxed{\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)}$$